سوال ۱

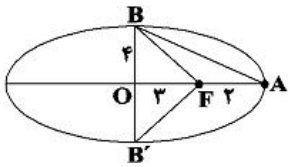
پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

روش اول: چون نسبت خواسته است و $e = \frac{۳}{۵}$ پس:

a	b	c
۵	۴	۳

در شکل جاگذاری می‌کنیم.



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{BB'F}}} = \frac{\frac{۲\times۴}{۲}}{\frac{۳\times۸}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

روش دوم:با توجه به آن که مساحت $\overset{\triangle}{BB'F}$ دو برابر مساحت $\overset{\triangle}{OBF}$ است، داریم:

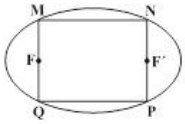
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{BB'F}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{۲S_{\overset{\triangle}{OBF}}} = \frac{AF}{۲OF} = \frac{a-c}{۲c} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{c}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{e}-۱\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۵}{۳}-۱\right) = \frac{۱}{۳}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

با توجه به شکل رسم شده داریم:



$$MN = ۲c = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow c = \sqrt{۶}$$

نقطهٔ N روی محیط بیضی است و می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از کانون‌های بیضی برابر با ۲a (قطر بزرگ) است، بنابراین:

$$NF'+NF = ۲a \Rightarrow ۱+\sqrt{۱^۲+(۲\sqrt{۶})^۲} = ۲a$$

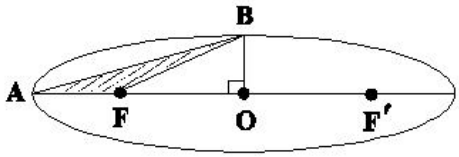
$$\Rightarrow ۱+\sqrt{۲۵} = ۲a \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»



خروج از مرکز بیضی: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a(I)$

در یک بیضی داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{(I)} a^۲ = b^۲ + \frac{۳}{۴}a^۲$$

$$\Rightarrow b^۲ = \frac{۱}{۴}a^۲ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}a(II)$$

با توجه به شکل، ارتفاع مثلث ABF برابر OB و قاعدهٔ آن برابر AF است:

$$\left.\begin{array}{l} OB = b \\ AF = a - c \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABF} = \frac{۱}{۲} \times AF \times OB = \frac{۱}{۲} \times (a - c) \times (b)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} S_{ABF} = \frac{۱}{۲} \times (a - \frac{\sqrt{۳}}{۲}a) \times (\frac{۱}{۲}a) = ۴ - ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}(۲ - \sqrt{۳})a^۲ = ۲(۲ - \sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴ \xrightarrow{(II)} b = ۲$$

درنتیجه:

قطر کوچک بیضی: $۲b = ۴$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

قطر کوچک بیضی برابر ۸ و قطر بزرگ بیضی برابر ۱۲ است. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶ \\ ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = ۶^۲ - ۴^۲ = ۲۰ \Rightarrow c = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۶} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

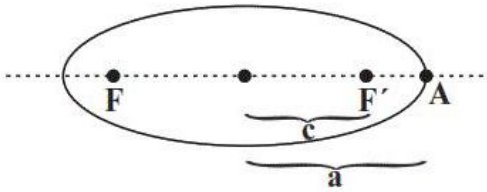
سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به شکل زیر داریم: $AF = a + c$

$AF' = a - c$



$$\left.\begin{array}{r} AF + AF' = ۲a \\ AF + AF' = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$

$$\left.\begin{array}{r} AF - AF' = FF' = ۲c \\ AF - AF' = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

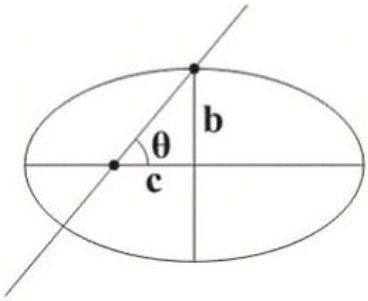
سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

شکلی فرضی برای درک بهتر مسئله رسم می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید، شیب خط برابر $\frac{۴}{۳}$ است.

شیب خط $= \tan\theta = \frac{b}{c} = \frac{۴}{۳}$



می‌توان گفت $b = ۴k$ و $c = ۳k$. پس طبق قضیه فیثاغورس $a = ۵k$ است.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

نقطهٔ x روی بیضی قرار دارد و طبق تعریف بیضی، داریم:

$$XF + XF' = ۲a$$

که ۲a طول قطر کانونی بیضی است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه XFF' داریم:

$$XF^۲ + FF'^۲ = XF'^۲$$

FF' همان فاصلهٔ کانونی بیضی است که با ۲c نمایش می‌دهیم. با توجه به دو رابطهٔ بالا داریم:

$$XF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - XF)^۲$$

$$\Rightarrow XF^۲ + ۴c^۲ = ۴a^۲ + XF^۲ - ۴aXF$$

$$\Rightarrow ۴aXF = ۴a^۲ - ۴c^۲ \Rightarrow XF = \frac{a^۲ - c^۲}{a}$$

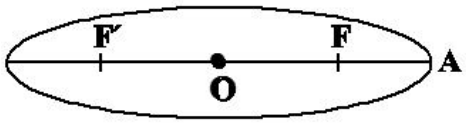
در بیضی می‌دانیم $a^۲ - c^۲ = b^۲$ که ۲b طول قطر غیرکانونی است. بنابراین:

$$\begin{cases} ۲a = ۱۸ \Rightarrow a = ۹ \\ ۲b = ۱۲ \Rightarrow b = ۶ \end{cases}$$

$$XY = ۲XF = ۲ \times \frac{a^۲ - c^۲}{a} = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲ \times ۶^۲}{۹} = ۸$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱



مطابق شکل فرضی داریم:

$$۲b = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۲}$$

$$FA = ۲ \Rightarrow a - c = ۲ \quad (I)$$

طبق رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$، داریم:

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ \Rightarrow b^۲ = (a - c)(a + c)$$

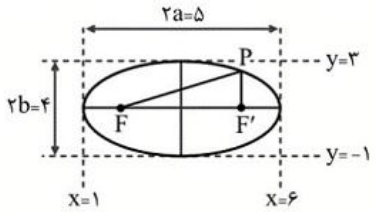
$$b^۲ = ۲(a + c) \Rightarrow ۸ = ۲(a + c) \Rightarrow a + c = ۴ \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \begin{cases} a - c = ۲ \\ a + c = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ c = ۱ \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲



با توجه به شکل بالا، در این بیضی $2a = 5$ و $2b = 4$، پس با توجه به اینکه $a^2 = b^2 + c^2$ داریم $2c = 3$. از طرفی محیط مثلث FPF' برابر است با:

$$\underbrace{PF + PF'}_{2a} + \underbrace{FF'}_{2c} = 5 + 3 = 8$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به مقدار $a = 5$ و $b = 3$ در بیضی و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ داریم:

$25 = 9 + c^2$ یعنی $c = 4$. حال معادله خط BF را می‌نویسیم:

$$m_{BF} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow BF : y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 0)$$

$$\Rightarrow 4y + 3x - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{A'(-5,0)} A'H = \frac{|-15-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{27}{5} = 5/4$$